ΑΛΓΕΒΡΑ Ι - ΕΡΓΑΣΙΑ 2

ΣΕΜΦΕ, 7ο Εξάμηνο, ακ. έτος 2011-12

1. Έστω G ομάδα και έστω H υποομάδα της G.
α) Αν $K \lhd G$ είναι και $K \lhd H$; Αντίστροφα, αν $K \lhd H$ είναι και $K \lhd G$;
β) Δείξτε ότι για $g \in G$ το σύνολο gHg^{-1} είναι υποομάδα της G.
γ) Δείξτε ότι το σύνολο $G_H = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$ είναι υποομάδα της G.
δ) Δείξτε ότι $H \lhd G_H$ και ότι η G_H είναι η μεγαλύτερη υποομάδα της G που περιέχει την H ως κανονική υποομάδα.
ε) Δείξτε ότι το σύνολο $N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ είναι υποομάδα της H.
στ) Δείξτε ότι $N \lhd G$ και μάλιστα η μεγαλύτερη δυνατή υποομάδα της H που είναι κανονική μέσα στην G.

2. Έστω G ομάδα.
α) Δείξτε ότι G αβελιανή αν και μόνον αν η απεικόνιση $\psi : G \longrightarrow G$ με $\psi(x) = x^{-1}$ είναι αυτομορφισμός.
β) Δείξτε ότι ένας αυτομορφισμός $f : G \longrightarrow G$ διατηρεί την τάξη ενός σ-τοιχείου και απεικονίζει μια κλάση συζυγίας σε μια κλάση συζυγίας.
γ) Έστω $\phi : G \longrightarrow G'$ ομομορφισμός ομάδων και έστω $a \in G$. Δείξτε ότι η τάξη του $\phi(a)$ διαιρεί την τάξη του a.
δ) Έστω G πεπερασμένη και έστω $\phi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ επιμορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι η G περιέχει στοιχείο τάξης 5.
ε) Έστω $\phi : G \longrightarrow G'$ επιμορφισμός ομάδων και έστω $N' \lhd G'$. Δείξτε ότι $\phi^{-1}(N') \lhd G$ και μάλιστα $G/\phi^{-1}(N') \cong G'/N'$.
στ) Έστω οι ομάδες $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Δείξτε ότι $\mathbb{C}^*/S^1 \cong \mathbb{R}^+$, όπου $S^1 = \{x \in \mathbb{C}^*; |x| = 1\}$.

3. α) Βρείτε την τάξη του στοιχείου $\sigma = (1234)(2367)(1584) \in S_8$.
β) Βρείτε στην S_{12} μια υποομάδα τάξης 35.
γ) Βρείτε όλες τις υποομάδες της S_3. Ποιές από αυτές είναι κανονικές;
δ) Δείξτε ότι το σύνολο $H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ αποτελεί μία κανονική υποομάδα της S_4. Με ποιά ομάδα είναι η H ισομορφική;
ε) Βρείτε όλες τις δυνατές τάξεις των στοιχείων της S_4.

4. α) Βρείτε όλες τις μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 900 και συμπτύξτε τες κατά το δυνατόν.
β) Βρείτε όλες τις μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες G τέτοιες ώστε $|G| \leq 30$ και $g^{12} = 1$ για κάθε $g \in G$.

γ) Δείξτε ότι η ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Παράδοση: 15 Φεβρουαρίου 2012.

Σ. Λαμπροπούλου